



TITLE:

箱玉系と超離散KdV方程式の N ソリトン解 (可積分数理の新潮流)

AUTHOR(S):

泉, 誠

CITATION:

泉, 誠. 箱玉系と超離散KdV方程式の N ソリトン解 (可積分数理の新潮流). 数理解析研究所講究録 2009, 1650: 116-135

ISSUE DATE:

2009-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/140770>

RIGHT:

箱玉系と超離散 KdV 方程式の N ソリトン解

(The box-ball system and the N -soliton solution of the ultradiscrete KdV equation)

島根大学 教育学部 泉 誠 (Makoto Idzumi)

(Department of Mathematics, Faculty of Education, Shimane University)

箱玉系の状態は超離散 KdV 方程式のソリトン解で表すことができる。箱玉系の状態から壁 '10' を消去するという操作が、ソリトン解にたいするどのような操作に対応するのかを調べる。この結果を利用して、箱玉系の任意時刻の状態を、初期状態から容易に求められるデータだけを用いて表す式を得ることができる。周期箱玉系の初期値問題の解についても述べる。¹

1 はじめに

高橋-薩摩 [1] の箱玉系の状態は離散 KdV 方程式の超離散極限 (超離散 KdV 方程式, 長いので UDKdV と略記) に従って時間とともに変化する (時間発展をする)。後者のソリトン解のあるクラスは箱玉系の状態と時間発展を表す。これらのことは超離散極限に関する最初の論文 [2] の中で既に述べられている。箱玉系とそのさまざまな拡張についてはその後いろいろ研究されているが、「状態と時間発展がソリトン解の公式で書ける」ということを積極的に利用した研究は、なされていないようである。そこで初心に帰ってこの方面から箱玉系を攻めてみた。次のことがわかった:

- 箱玉系の任意の状態とその時間発展は UDKdV のソリトン解で記述できる。
- 箱玉系の状態から壁 '10' を一斉に消去するという操作は、ソリトン解に含まれるソリトンの大きさを表すパラメータの値を 1 だけ減らすということに、ちょうど対応している。
- この結果を利用して、箱玉系の任意時刻の状態を、初期状態から容易に求められるデータだけを用いて表す式が得られる。すなわち箱玉系の初期値問題の解が得られる。
- 周期箱玉系の状態は、箱玉系の状態の或る列の極限から求めることができる。このことを利用して周期箱玉系の初期値問題の解が得られる。

次節で UDKdV のソリトン解を表す関数について詳しく述べた後で、これらのことを順に説明していこう。

2 超離散 KdV 方程式のソリトン解

次の方程式は (双線型形式の) 離散 KdV 方程式 (以下 DKdV と略す) と呼ばれる。

$$\tau_{n+1}^{t+1}\tau_n^{t-1} = (1-\delta)\tau_{n+1}^t\tau_n^t + \delta\tau_{n+1}^{t-1}\tau_n^{t+1}.$$

ここで t と n はそれぞれ時間, 空間を表す変数で, 通常は \mathbb{Z} を動くと考えるが, 必ずそうしなければいけないというわけではない。従属変数 τ は実数値とする。超離散化の手続きにより, この方程式から次の方程式が得られる [2]。

$$\rho_{n+1}^{t+1} + \rho_n^{t-1} = \max \{ \rho_{n+1}^t + \rho_n^t, \rho_{n+1}^{t-1} + \rho_n^{t+1} - 1 \}. \quad (1)$$

これを超離散 KdV 方程式 (UDKdV) と呼ぼう。DKdV の N ソリトン解は, 例えば [3] にある一般論により, 知られている。それを超離散化したものを UDKdV の N ソリトン解と呼ぼう。それは次の形をしてい

¹本稿は間田潤氏, 時弘哲治氏 (東京大学 数理解析研究所) との共同研究の成果を泉が発表したものです。

る [2] : 正整数 N と実数のパラメータ P_1, \dots, P_N および $\theta_1, \dots, \theta_N$ にたいして

$$\begin{aligned}\eta_n^t &= \eta_n^t((P_i, \theta_i)_{i=1}^N) = \eta_n^t(N; P_1, \dots, P_N; \theta_1, \dots, \theta_N) \\ &= \max \left\{ 0, \max_{\substack{J \subset [N] \\ J \neq \emptyset}} \left[\sum_{i \in J} (\theta_i + tP_i - n) - \sum_{\substack{i, j \in J \\ i \neq j}} \min \{P_i, P_j\} \right] \right\}.\end{aligned}\quad (2)$$

ここで $[N]$ は集合 $\{1, 2, \dots, N\}$ を表す. パラメータ P_i, θ_i を全て整数にすれば η_n^t は整数値であるが, 以下では必要のない限りこのように制限しない. 本節では, この関数 $n \mapsto \eta_n^t$ について詳しく調べる.

次のように書くと見やすい: $k = 0, 1, \dots, N$ および $[N]$ の k 元部分集合 J にたいして $\Phi_k^t(J) = \Phi_k^t(J; (P_i, \theta_i)_{i=1}^N)$ を

$$\Phi_k^t(J) = \sum_{i \in J} (\theta_i + tP_i) - \sum_{\substack{i, j \in J \\ i \neq j}} \min \{P_i, P_j\} \quad (k \geq 1) \quad (3)$$

および $\Phi_0^t(\emptyset) = 0$ と定め, $\Psi_k^t = \Psi_k^t((P_i, \theta_i)_{i=1}^N)$ を

$$\Psi_k^t = \max_{\substack{J \subset [N] \\ |J|=k}} [\Phi_k^t(J)] \quad (k \geq 1) \quad (4)$$

および $\Psi_0^t = 0$ と定める. すると (2) を

$$\eta_n^t = \max \left\{ \Psi_k^t - kn \mid k = 0, 1, \dots, N \right\} \quad (5)$$

と書くことができる.

次のことは直ちにわかる:

Proposition 2.1. (a) $n \mapsto \eta_n^t$ は (下に) 凸, そのグラフは有限個の点で折れる折れ線.

(b) n が大きいところ (ずっと右) で $\eta_n^t = 0$; n が小さいところ (ずっと左) で $\eta_n^t = \Psi_N^t - Nn$.

(c)

$$\eta_n^t(N; \underbrace{0, \dots, 0}_N; \theta_1, \dots, \theta_N) = \max \left\{ 0, \max_{\emptyset \neq J \subset [N]} \left[\sum_{i \in J} (\theta_i - n) \right] \right\}.$$

とくにこれは t に依らない.

(d) $N > N' > 0$ とする. このとき

$$\begin{aligned}\eta_n^t(N; P_1, \dots, P_{N'}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-N'}; \theta_1, \dots, \theta_N) \\ = \eta_n^t(N'; P_1, \dots, P_{N'}; \theta_1, \dots, \theta_{N'}) + \eta_n^t(N - N'; \underbrace{0, \dots, 0}_{N-N'}; \theta_{N'+1}, \dots, \theta_N).\end{aligned}$$

とくに右辺の第 2 項は t に依らない.

Proof. (a), (b) は (5) から, (c) は (2) から明らか. (d) $(N', N] = \{i \mid i \in \mathbb{Z}, N' < i \leq N\}$ と書く. $i \in [N']$

ならば $\xi_i = \theta_i + tP_i - n$, $i \in (N', N]$ ならば $\xi_i = \theta_i - n$, そして $\xi_{ij} = \min\{P_i, P_j\}$ と書く. 左辺は

$$\begin{aligned}
 & \max \left\{ 0, \max_{\emptyset \neq J \subset [N]} \left\{ \sum_{i \in J \cap [N']} \xi_i + \sum_{i \in J \cap (N', N]} \xi_i - \sum_{\substack{i, j \in J \cap [N'] \\ i \neq j}} \xi_{ij} \right\} \right\} \\
 &= \max \left\{ 0, \max_{\emptyset \neq J_1 \subset [N']} \left\{ \sum_{i \in J_1} \xi_i - \sum_{\substack{i, j \in J_1 \\ i \neq j}} \xi_{ij} \right\}, \max_{\emptyset \neq J_2 \subset (N', N]} \left\{ \sum_{i \in J_2} \xi_i \right\}, \right. \\
 & \quad \left. \max_{\substack{\emptyset \neq J_1 \subset [N'] \\ \emptyset \neq J_2 \subset (N', N]}} \left\{ \sum_{i \in J_1} \xi_i - \sum_{\substack{i, j \in J_1 \\ i \neq j}} \xi_{ij} + \sum_{i \in J_2} \xi_i \right\} \right\} \\
 &= \max \left\{ 0, \max_{\emptyset \neq J_1 \subset [N']} \left\{ \sum_{i \in J_1} \xi_i - \sum_{\substack{i, j \in J_1 \\ i \neq j}} \xi_{ij} \right\}, \max_{\emptyset \neq J_2 \subset (N', N]} \left\{ \sum_{i \in J_2} \xi_i \right\}, \right. \\
 & \quad \left. \max_{\emptyset \neq J_1 \subset [N']} \left\{ \sum_{i \in J_1} \xi_i - \sum_{\substack{i, j \in J_1 \\ i \neq j}} \xi_{ij} \right\} + \max_{\emptyset \neq J_2 \subset (N', N]} \left\{ \sum_{i \in J_2} \xi_i \right\} \right\} \\
 &= \max \left\{ 0, \max_{\emptyset \neq J_1 \subset [N']} \left\{ \sum_{i \in J_1} \xi_i - \sum_{\substack{i, j \in J_1 \\ i \neq j}} \xi_{ij} \right\} \right\} + \max \left\{ 0, \max_{\emptyset \neq J_2 \subset (N', N]} \left\{ \sum_{i \in J_2} \xi_i \right\} \right\}.
 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 \{J \mid \emptyset \neq J \subset [N]\} &= \{J \subset [N] \mid J \cap [N'] \neq \emptyset, J \cap (N', N] = \emptyset\} \\
 &\quad \cup \{J \subset [N] \mid J \cap [N'] = \emptyset, J \cap (N', N] \neq \emptyset\} \\
 &\quad \cup \{J \subset [N] \mid J \cap [N'] \neq \emptyset, J \cap (N', N] \neq \emptyset\}
 \end{aligned}$$

および $\max\{0, A, B, A+B\} = \max\{0, A\} + \max\{0, B\}$ を使った. □

さて $A_k^t = A_k^t((P_i, \theta_i)_{i=1}^N) = A_k^t(N; P_1, \dots, P_N; \theta_1, \dots, \theta_N)$ を次式で定義する:

$$A_k^t = \Psi_k^t - \Psi_{k-1}^t \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (6)$$

したがって $\Psi_k^t = \sum_{i=1}^k A_i^t$. 便宜上 $A_0^t = +\infty$, $A_{N+1}^t = -\infty$ とする.

Proposition 2.2. $P_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, N$) ならば

$$A_1^t \geq A_2^t \geq \dots \geq A_N^t \quad (7)$$

である; もっと強く $P_i > 0$ ($i = 1, \dots, N$) ならば

$$A_1^t > A_2^t > \dots > A_N^t \quad (8)$$

である. そして区間 $[A_{k+1}^t, A_k^t] = \{n \in \mathbb{R} \mid A_{k+1}^t \leq n \leq A_k^t\}$ において (2) は

$$\eta_n^t = \Psi_k^t - kn \quad (9)$$

となる (ここで $k = 0, 1, \dots, N$).

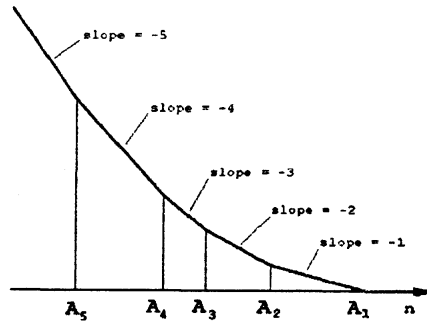


図 1: $n \mapsto \eta_n^t$ のグラフ. (9) を見よ.

関数 (9) の様子を図 1 に示した. 証明のために少し準備をする.

Lemma 2.3. $k = 1, 2, \dots, N-1$ とする. $\{c_1, \dots, c_k\}$ を, (3) で定義された $J \mapsto \Phi_k^t(J)$ がそこで最大値をとるような $[N]$ の k 元部分集合だとする. このとき数 c_{k+1} を, $c_{k+1} \notin \{c_1, \dots, c_k\}$, $c_{k+1} \in [N]$ かつ $J \mapsto \Phi_{k+1}^t(J)$ が $\{c_1, \dots, c_{k+1}\}$ で最大値をとるように選ぶことができる.

Proof. $(k+1)$ 元部分集合 $\{d_1, \dots, d_{k+1}\}$ で Φ_{k+1}^t が最大になるとする. 集合 $\{d_1, \dots, d_{k+1}\} \cap \{c_1, \dots, c_k\}$ の元の個数を r とする. 必要なら名前を付け直して, 次のようにできる: $i \leq r$ ならば $d_i \in \{c_1, \dots, c_k\}$; $k < i \leq k+1$ ならば $d_i \notin \{c_1, \dots, c_k\}$; そして $P_{d_{k+1}} = \min\{P_{d_i} \mid i = r+1, \dots, k+1\}$. このとき

$$\Phi_{k+1}^t(\{d_1, \dots, d_{k+1}\}) = \Phi_{k+1}^t(\{c_1, \dots, c_k, d_{k+1}\}) \quad (10)$$

であることを示そう.

自明な $\min\{P_j, P_{d_{k+1}}\} \leq P_{d_{k+1}}$ ($\forall j$) と $P_{d_{k+1}} = \min\{P_{d_i}, P_{d_{k+1}}\}$ ($r < i \leq k$) から

$$\sum_{i=r+1}^k \min\{P_{d_i}, P_{d_{k+1}}\} \geq \sum_{j \in \{c_1, \dots, c_k\} \setminus \{d_1, \dots, d_r\}} \min\{P_j, P_{d_{k+1}}\}.$$

両辺に $\sum_{i=1}^r \min\{P_{d_i}, P_{d_{k+1}}\}$ を加えれば $\sum_{i=1}^k \min\{P_{d_i}, P_{d_{k+1}}\} \geq \sum_{i=1}^k \min\{P_{c_i}, P_{d_{k+1}}\}$, したがって

$$(\theta_{d_{k+1}} + tP_{d_{k+1}}) - \sum_{i=1}^k 2 \min\{P_{d_i}, P_{d_{k+1}}\} \leq (\theta_{d_{k+1}} + tP_{d_{k+1}}) - \sum_{i=1}^k 2 \min\{P_{c_i}, P_{d_{k+1}}\}$$

が成り立つ. c_i に対する仮定から $\Phi_k^t(\{d_1, \dots, d_k\}) \leq \Phi_k^t(\{c_1, \dots, c_k\})$. これらを辺々加えれば $\Phi_{k+1}^t(\{d_1, \dots, d_{k+1}\}) \leq \Phi_{k+1}^t(\{c_1, \dots, c_k, d_{k+1}\})$ を得る. 逆向きの不等式は d_i に対する仮定から成り立つ. よって (10) を得る. \square

Definition 2.4. 数 c_1 を, $[N]$ 上の関数 $c \mapsto \theta_c + tP_c (= \Phi_1^t(\{c\}))$ が最大になる点とする (一意に定まるとは限らない). 各 $k = 2, \dots, N$ にたいして, 順に, 数 c_k を, $c_k \notin \{c_1, \dots, c_{k-1}\}$, $c_k \in [N]$ かつ Φ_k^t が $\{c_1, \dots, c_k\}$ で最大値をとるように選ぶ (直前の補題により存在する; 一意に定まるとは限らない). このとき $i \mapsto c_i$ は $[N]$ の置換である. このようにして定まる置換の全体を

$$\mathfrak{S}_N^t((P_i, \theta_i)_{i=1}^N) \quad (11)$$

と記す. 略して \mathfrak{S}_N^t と書くこともある.

Lemma 2.5. $\sigma_t \in \mathfrak{S}_N^t$ とする.

$$(a) \Psi_k^t = \Phi_k^t(\{\sigma_t(1), \dots, \sigma_t(k)\}) = \sum_{i=1, \dots, k} (\theta_{\sigma_t(i)} + tP_{\sigma_t(i)}) - \sum_{\substack{i, j=1, \dots, k \\ i \neq j}} \min\{P_{\sigma_t(i)}, P_{\sigma_t(j)}\};$$

$$(b) A_k^t = \theta_{\sigma_t(k)} + tP_{\sigma_t(k)} - \sum_{i=1}^{k-1} 2 \min\{P_{\sigma_t(i)}, P_{\sigma_t(k)}\};$$

$$(c) k < l \text{ ならば } A_k^t \geq \theta_{\sigma_t(l)} + tP_{\sigma_t(l)} - \sum_{i=1}^{k-1} 2 \min\{P_{\sigma_t(i)}, P_{\sigma_t(l)}\}.$$

Proof. (a), (b) は明らか. σ_t の作り方から $\Phi_k^t(\{\sigma_t(1), \dots, \sigma_t(k)\}) \geq \Phi_k^t(\{\sigma_t(1), \dots, \sigma_t(k-1), \sigma_t(l)\})$. 両辺から $\Phi_{k-1}^t(\{\sigma_t(1), \dots, \sigma_t(k-1)\})$ を引けば (c) の不等式が得られる. \square

Proof of Proposition 2.2. $P_i \geq 0$ ($\forall i$) ならば $\min\{P_{\sigma_t(k)}, P_{\sigma_t(k+1)}\} \geq 0$; よって

$$\begin{aligned} & \theta_{\sigma_t(k+1)} + tP_{\sigma_t(k+1)} - \sum_{i=1}^{k-1} 2 \min\{P_{\sigma_t(i)}, P_{\sigma_t(k+1)}\} \\ & \geq \theta_{\sigma_t(k+1)} + tP_{\sigma_t(k+1)} - \sum_{i=1}^k 2 \min\{P_{\sigma_t(i)}, P_{\sigma_t(k+1)}\} = A_{k+1}^t. \end{aligned}$$

Lemma 2.5 (c) により, 左辺 $\leq A_k^t$. よって (7) を得る. $P_i > 0$ ($\forall i$) のときも同様に (8) を得る. さて (7) すなわち $A_1^t \geq A_2^t \geq \dots \geq A_N^t$ だとする. $Y = \Psi_k^t - kn$ で定義される nY 平面の直線を l_k と記す ($k = 0, 1, \dots, N$). 各 k ($< N$) に対して, l_k と l_{k+1} の交点より上を残りの直線が通ることはないことがわかる. よって (9) を得る. \square

あと 2 つ, 簡単な性質を述べておこう.

Proposition 2.6. パラメータが次の条件を満たしているとしよう.

$$\begin{aligned} P_1 & \geq P_2 \geq \dots \geq P_N > 0; \\ P_i & = P_j, i < j \implies \theta_i \geq \theta_j. \end{aligned}$$

Λ を

$$\Lambda = \Lambda((P_i)_{i=1}^N) = \{(i, k) \mid i \in [N], k \in [N], i < k, \text{ and } P_i > P_k\}.$$

なる集合とする. t が

$$\text{すべての } (i, k) \in \Lambda \text{ に対して } t \geq \frac{\theta_k - \theta_i}{P_i - P_k} + 2(i-1) \quad (12)$$

を満たすならば, 置換の集合 $\mathfrak{S}_N^t((P_i, \theta_i)_{i=1}^N)$ は単位元 $i \mapsto i$, を含む. したがって

$$A_k^t = \theta_k + tP_k - 2(k-1)P_k \quad (k = 1, \dots, N) \quad (13)$$

である.

Proof. 置換の値が $\sigma_t(i) = i$ と定まるための条件を書いたものが (12) である. \square

Proposition 2.7. 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $\mathfrak{S}_N^t((P_i, \theta_i)_{i=1}^N) = \mathfrak{S}_N^t((P_i + x, \theta_i)_{i=1}^N)$.

Proof. (3) を思い出す. k と $J \subset [N]$, $|J| = k$, が何であっても

$$\Phi_k^t(J; (P_i + x, \theta_i)_{i=1}^N) = \Phi_k^t(J; (P_i, \theta_i)_{i=1}^N) + xk(t - k + 1).$$

よって, もし J が $\Phi_k^t(J; (P_i, \theta_i)_{i=1}^N)$ を最大にするならば, $\Phi_k^t(J; (P_i + x, \theta_i)_{i=1}^N)$ も最大にする. 逆も言える. よって主張が成り立つ. \square

参考までに, 方程式 $n = A_i^t$ ($i = 1, 2, \dots$) の定める nt -平面上の曲線 (折れ線) 群の様子は図 2 のようになる.

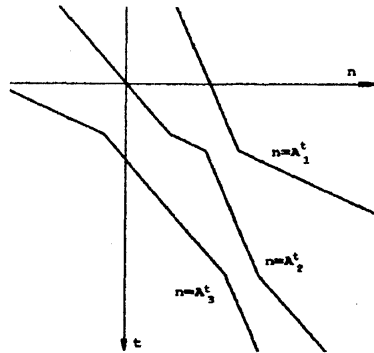


図 2: 各 i に対して方程式 $n = A_i^t$ は nt -平面上の曲線 (折れ線) を定める.

$$f = \dots 0 \overbrace{110001} \overbrace{101110000000} \dots$$

$$Tf = \dots 0001100010001111000 \dots$$

図 3: Tf の作り方: f の中の隣りあう '10' を線で結ぶ; 次に線で結ばれた 1 と 0 を除いた部分列に対して同じこと ('10' を線で結ぶ) をする; この操作を 1 がなくなるまで繰り返す (これが図の上に描いてあるもの); そして一斉に, 線で結ばれた 1 は 0 に, 0 は 1 に置き換える (影つきの 1 と 0 を反転する). こうしてできたものが Tf である. 線で結ばれた 1, 0 たちの位置 (f の図で影つきになっているところ) を「マークされた」位置と呼ぶことにする (あとで §6 でこの言葉をつかう).

3 箱玉系の状態の時間発展は UDKdV のソリトン解で表されること

箱玉系とは次のように定義される集合 Ω と写像 $T: \Omega \rightarrow \Omega$ の組 (Ω, T) のことである: まず

$$\Omega = \{f \mid f: \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}, \text{ ただし } f^{-1}(\{1\}) \text{ は有限}\};$$

Ω の元を箱玉系の状態と呼ぶ. 状態 f をしばしば

$$\dots f(-2)f(-1)f(0)f(1)f(2) \dots$$

のように書き表す. 写像 T は図 3 のように定義され, 時間発展演算子などと呼ばれる. T は次のように定義されと言っても同じであることがわかっている: $f \in \Omega$ に対して, $f^{-1}(\{1\})$ の下界を n_0 とするとき, $n < n_0$ ならば $(Tf)(n) = 0$, $n \geq n_0$ ならば

$$(Tf)(n) = \min \left\{ 1 - f(n), \sum_{k=-\infty}^{n-1} f(k) - \sum_{k=-\infty}^{n-1} (Tf)(k) \right\}. \quad (14)$$

写像 T は可逆であることがわかる (図 3 を見ればすぐわかる). $f \in \Omega$ を時刻 0 における状態とみなしたとき $T^t f = T^t(f)$ を時刻 t における状態と呼ぶ ($t \in \mathbb{Z}$); ここで T^t は, $t > 0$ ならば t 個の T の合成, $t < 0$ ならば $-t$ 個の T^{-1} の合成である. $T^t(f)$ を f^t と略記することがある.

$$\begin{array}{rcl}
 f & = & \dots 0110001101110000000\dots \\
 Ef & = & \dots 0100111000000\dots
 \end{array}$$

図 4: '10'-消去. ■は座標 $a_1(f)$ の位置を示す.

$f \in \Omega$ とする. 整数 i と正整数 m にたいして, $i - m \leq j \leq i - 1$ ならば $f(j) = 1$ であり, かつ $f(i) = f(i - m - 1) = 0$ であるならば, 状態 f には位置 i に長さ m の (1 の) ブロックがある, ということにする.² 位置 i に壁 '10' がある, ということもある. 状態 f に含まれるブロックの個数を $p_1(f)$, それらの位置を大きい方から $a_1(f), a_2(f), \dots, a_{p_1(f)}(f)$ と記す.

$$a_{p_1(f)}(f) < \dots < a_2(f) < a_1(f).$$

位置 $a_i(f)$ にあるブロックを i 番目のブロックとよぶ. p_1 を写像 $\Omega \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と考えると便利である. 状態 f にたいして状態 $Ef = E(f)$ を次のように定義する:

$$(Ef)(n) = \begin{cases} f(n+1) & (n \geq a_1(f)), \\ f(n-2k+1) & (a_{k+1}(f) + 2k \leq n \leq a_k(f) + 2k - 3; k = 1, 2, \dots, p_1(f) - 1), \\ f(n - 2p_1(f) + 1) & (n \leq a_{p_1(f)} + 2p_1(f) - 3). \end{cases}$$

写像 $E: \Omega \rightarrow \Omega$ を '10'-消去 (略して消去) と呼ぼう. Ef は f の壁 '10' を一斉に消去したものである (図 4 を見よ). 各 $i = 2, 3, \dots$ に対して

$$p_i(f) = p_1(E^{i-1}(f))$$

と定義する. $p_i(T(f)) = p_i(f)$ であることがわかるから各 $p_i(f)$ は保存量である. $\sum_{i=1}^{\infty} p_i(f) = |f^{-1}(\{1\})|$ かつ $p_1(f) \geq p_2(f) \geq p_3(f) \geq \dots$ であるから $p(f) = (p_1(f), p_2(f), \dots)$ は数 $|f^{-1}(\{1\})|$ の分割になっている. 分割 $p(f)$ の共役を $L(f) = (L_1(f), L_2(f), \dots)$ と記し共役保存量と呼ぶことにする. $L_j(f) = |\{i \mid i \geq 1, p_i(f) \geq j\}|$ である.

Fact 3.1 ([5] の Theorem 1 (+ α)). 状態 $f \in \Omega$ に対して次のような実数 t_0 が存在する: $t \geq t_0$ であるならば

$$i < k \text{ であるすべての } i, k \text{ に対して } a_i(f^t) - a_k(f^t) - 2(k-i)L_k(f) \geq 0$$

(したがってとくに $a_1(f^t) > a_2(f^t) > \dots > a_{p_1(f)}(f^t)$), $a_i(f^t) = L_i(f)t + \text{const}_i$, そして

$$f^t(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \in \bigcup_{i=1, \dots, p_1(f)} [a_i(f^t) - L_i(f), a_i(f^t) - 1], \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

が成り立つ.

これは, 時間が経てばいつかは, 一番大きいブロック (大きさ $L_1(f)$) が一番右を速さ $L_1(f)$ で右に進み, 二番目に大きいブロック (大きさ $L_2(f)$) がその次を速さ $L_2(f)$ で右に進み, \dots , というふうになる; そしてそれ以降ずっとそうである, と言っている.

²block という語を [4] とは異なる意味で使っていることに注意しておく.

状態 $f \in \Omega$ を時間発展させていったものの全体を (u_n^t) としよう: $u_n^t = (T^t f)(n)$. この場合 f を初期状態と呼ぶ. (14) により (u_n^t) は次の方程式を満たす:

$$u_n^t = \min \left\{ 1 - u_n^{t-1}, \sum_{k=-\infty}^{n-1} u_k^{t-1} - \sum_{k=-\infty}^{n-1} u_k^t \right\}. \quad (15)$$

この方程式も, (双線型形式ではない) 離散 KdV 方程式を超離散化して得られるので, 超離散 KdV 方程式と呼ばれる. 従属変数を

$$\rho_n^t = \rho_n^t(u) = \sum_{n'=n}^{\infty} \sum_{t'=-\infty}^t u_{n'}^{t'}, \quad (16)$$

(この和は Ω, T の定義により有限) のように変換すれば, (ρ_n^t) は UDKdV (1) に従うことがわかる. これは逆にも解ける:

$$u_n^t = \rho_{n+1}^{t-1} - \rho_{n+1}^t - \rho_n^{t-1} + \rho_n^t. \quad (17)$$

時刻 t におけるブロックの位置 $a_i(f^t)$ を用いて $n \mapsto \rho_n^t$ を明示的に書くことができる:

$$\rho_n^t = \begin{cases} 0 & (n \geq a_1(f^t)), \\ \sum_{i=0}^k a_i(f^t) - kn & (a_{k+1}(f^t) \leq n \leq a_k(f^t); k = 1, 2, \dots, p_1(f) - 1), \\ \sum_{i=0}^{p_1(f)} a_i(f^t) - p_1(f)n & (n \leq a_{p_1(f)}(f^t)). \end{cases}$$

これにより UDKdV のソリトン解との正確な対応がわかる.

Theorem 3.2. $f \in \Omega$ とする. t_0 を Fact 3.1 のものとする. (2) で与えられるソリトン解 $\eta_n^t = \eta_n^t((P_i, \theta_i)_{i=1}^N)$ のパラメータを $N = p_1(f)$ および

$$P_i = L_i(f), \quad \theta_i = a_i(f^{t_0}) - t_0 L_i(f) + 2(i-1)L_i(f) \quad (i = 1, 2, \dots, p_1(f)) \quad (18)$$

のように選ぶ. このとき η_n^t は (16) の $\rho_n^t(u)$ とすべての t, n において一致する. したがって

$$u_n^t = (T^t f)(n) = \eta_{n+1}^{t-1} - \eta_{n+1}^t - \eta_n^{t-1} + \eta_n^t \quad (19)$$

という式も成り立つ.

Proof. ρ_n^t と η_n^t は同じ方程式 (1) をみたす. 方程式は, 図 5 の黒丸での値が与えられれば白丸での値が決まる, というふうになっているので, 次のことが示されれば任意の t, n で両者が一致することが証明されたことになる: (a) 時刻 t_0 より未来で両者は一致する; (b) 或る位置 n_0 より右で, 両者は任意の $t \leq t_0$ において一致する.

ρ_n^t に対する上式と η_n^t に対する (9) を較べる. $t \geq t_0$ ならば $n \mapsto \rho_n^t$ のグラフの折れ点の n 座標 $a_k(f^t)$ は Fact 3.1 のようになる. したがって $a_k(f^t) = a_k(f^{t_0}) + (t - t_0)L_k(f)$. 他方, Λ を Proposition 2.6 のものとする $t_0 \geq \max\{(\theta_k - \theta_i)/(P_i - P_k) + 2(i-1) \mid (i, k) \in \Lambda\}$ が成り立つ. したがって $t \geq t_0$ ならば $n \mapsto \eta_n^t$ のグラフの折れ点の n 座標 A_k^t は (13) で与えられる. (18) を代入すると $A_k^t = a_k(f^{t_0}) + (t - t_0)L_k(f)$ となる. したがって $t \geq t_0$ ならば $a_k(f^t) = A_k^t$ であり, n の関数として $\rho_n^t = \eta_n^t$ である. これで (a) が示された.

$n_0 = a_1(f^{t_0})$ とすると, $n \geq n_0$ で $\rho_n^{t_0} = \eta_n^{t_0} = 0$. したがって (時間を逆転すると, すなわち T^{-1} により, ブロックは左に進むので) $n \geq n_0$ かつ $t \leq t_0$ で $\rho_n^t = \eta_n^t = 0$ が成り立つ. (b) が示された. \square

Corollary 3.3. 定理のようにパラメータを選ぶ. このとき時刻 t におけるブロックの位置は

$$a_k(f^t) = A_k^t = \theta_{\sigma_t(k)} + tP_{\sigma_t(k)} - \sum_{i=1}^{k-1} 2 \min\{P_{\sigma_t(i)}, P_{\sigma_t(k)}\} \quad (k = 1, \dots, p_1(f)) \quad (20)$$

と表される. ここで $\sigma_t \in \mathfrak{S}_{p_1(f)}^t((P_i, \theta_i)_{i=1}^{p_1(f)})$.

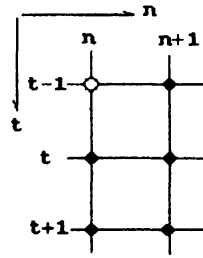


図 5: 方程式 (1) による値の決まり方.

こうして時刻 t における箱玉系の状態を表す式 (19) が得られたのだが, この式の中にあるパラメータは (18) のように「十分大きな」時刻でのデータを用いて表されている. したがって, これは初期値問題の解とは言えない.

4 箱玉系の‘10’-消去とソリトン解

初期状態 f から写像 T で時間発展させていった箱玉系の状態がパラメータ $P_1, \dots, P_{p_1(f)}$ および $\theta_1, \dots, \theta_{p_1(f)}$ に対応する $p_1(f)$ ソリトン解で表されているとしよう (Theorem 3.2). $i \leq p_2(f)$ ならば $P_i \geq 2$; $i > p_2(f)$ ならば $P_i = 1$ であった. このとき, f に ‘10’-消去をほどこした状態 Ef を初期状態とし T で時間発展させていった箱玉系の状態は, パラメータ $P_1, \dots, P_{p_2(f)}$ および $\theta_1, \dots, \theta_{p_2(f)}$ に対応する $p_2(f)$ ソリトン解で表されることを示そう.

まず T (時間発展) と E (‘10’-消去) がほとんど可換であることに注意しておく.

Lemma 4.1. どんな $f \in \Omega$ に対しても

$$(ETf)(n+1) = (TEf)(n) \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z}$$

が成り立つ. すなわち, シフト $S: \Omega \rightarrow \Omega$ を $(Sf)(n) = f(n+1)$ で定義するならば,

$$SET = TE$$

である. ($ST = TS, SE = ES$ であることは明らか.)

Proof. $Ef \neq 0$ である f についてのみ示せば十分. 図を用いた説明で済ますことにする (図 6). 一番上に描いたものが状態 f だとする. TEf と, Tf から ‘10’ではなくて) ‘01’を消去したものを較べる; これらは位置の座標の原点の位置がずれているだけで, 0 と 1 の並び方は同じである. 一方, ETf と, Tf から ‘01’を消去したのも, 0 と 1 の並び方は同じである (どちらも全ての 1 のブロックと 0 のブロックの大きさを 1 だけ小さくしたものだから). したがって TEf と ETf に関してもそうになっている: すなわち, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $(ETf)(n) = (TEf)(n + \delta(f))$ となるような $\delta(f) \in \mathbb{Z}$ がある.

あとは実は f に依らず $\delta(f) = -1$ であることを示せばよい. そのためには先頭の 1 のブロックの位置の変化を調べればよい. 今の図を眺めると, 確かに $\delta(f) = -1$ であることが読み取れる. きちんと示すには, f の 1 番目のブロックの大きさ Q と $\Delta = a_1(Tf) - a_1(f) - Q$ の値に関して, $Q \geq 2$ か $= 1$ か, $\Delta \geq 1$ か $= 0$ かで場合分けして考えればよいが, 省略する. \square

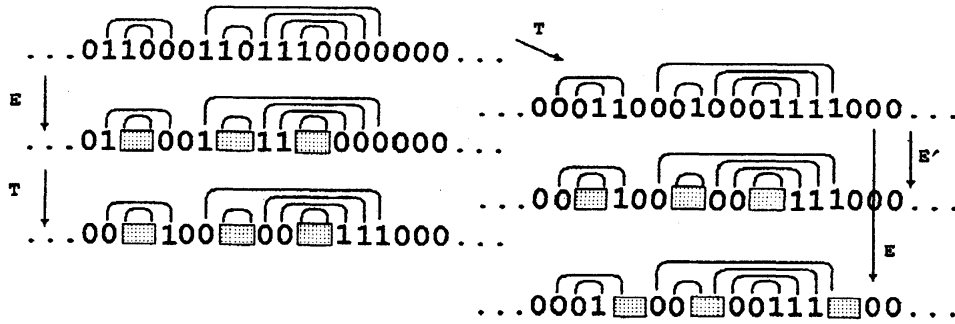


図 6: TEf と ETf . 図中の E' は '01' を消去.

Theorem 4.2. $f \in \Omega$ とする. パラメータ P_i, θ_i を Theorem 3.2 のように選ぶ. このとき, $p_2(f)$ ソリトン解 $\eta_n^{(1)t} = \eta_n^t \left((P_i - 1, \theta_i)_{i=1}^{p_2(f)} \right)$ は, $u_n^{(1)t} = (T^t(Ef))(n)$ から (16) のようにしてつくった $\rho_n^t(u^{(1)})$ とすべての t, n において一致する. したがって

$$u_n^{(1)t} = (T^t Ef)(n) = \eta_{n+1}^{(1)t-1} - \eta_{n+1}^{(1)t} - \eta_n^{(1)t-1} + \eta_n^{(1)t}$$

という式も成り立つ.

Proof. (I) 両者は同じ方程式 (1) に従う. 或る時刻以降で両者が一致していることを示せば十分である (なぜなら Theorem 3.2 のときと同じ理由で, その時刻以前の任意の時刻において或る位置 n_0 より右でどちらも 0 であるから). 次のことはわかっている: これらは各 t において n の関数として p_2 個の折れ点をもつ凸な折れ線で, (左から右へ見ていくとき) 折れ点を通るたびに傾きが 1 ずつ増え, 一番右の半無限区間では傾きが 0 になる. したがって n の関数として一致することを示すためには, 両者の折れ点の位置, すなわち各 $k = 1, \dots, p_2(f)$ に対し $A_k^t \left((P_i - 1, \theta_i)_{i=1}^{p_2(f)} \right)$ と $a_k(T^t Ef)$ が一致することを示せばよい. 少し準備をする.

(II) まず各 $k = 1, \dots, p_1(f)$ に対して

$$A_k^t \left((P_i - 1, \theta_i)_{i=1}^{p_1(f)} \right) = A_k^t \left((P_i, \theta_i)_{i=1}^{p_1(f)} \right) - t + 2(k-1) \quad (21)$$

であることが Lemma 2.5 (b) と Proposition 2.7 (左辺と右辺第 1 項のどちらも同じ σ を用いてよいことを保証する) からわかる.

Proposition 2.1 (d) により

$$\eta_n^t \left((P_i - 1, \theta_i)_{i=1}^{p_1(f)} \right) = \eta_n^t \left((P_i - 1, \theta_i)_{i=1}^{p_2(f)} \right) + \eta_n^t \left((0, \theta_i)_{i=p_2(f)+1}^{p_1(f)} \right);$$

右辺第 2 項は t に依らない. 左辺の折れ点の座標が $A_k^t \left((P_i - 1, \theta_i)_{i=1}^{p_1(f)} \right)$, 右辺第 1 項の折れ点の座標が $A_k^t \left((P_i - 1, \theta_i)_{i=1}^{p_2(f)} \right)$ で, どちらも Lemma 2.5 (b) のような式で表される. よって, $t \gg 1$ ならば各 $k = 1, \dots, p_2(f)$ に対して

$$A_k^t \left((P_i - 1, \theta_i)_{i=1}^{p_1(f)} \right) = A_k^t \left((P_i - 1, \theta_i)_{i=1}^{p_2(f)} \right). \quad (22)$$

(III) 次のようなものを考える: $T^t f$ の位置 $a_1(T^t f) + 1$ における値 0 は '10'-消去すると $ET^t f$ の位置 $a_1(T^t f)$ にうつる; これに対応する 0 の $T^t Ef$ における位置を $\alpha_1(t)$ と記す. すなわち, $Ef \neq 0$ である $f \in \Omega$ と $t \in \mathbb{Z}$ に対し, $\alpha_1(t) \in \mathbb{Z}$ を次をみたすものとして定義する:

$$(ET^t f)(n + a_1(T^t f)) = (T^t Ef)(n + \alpha_1(t)) \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z}.$$

このとき $\alpha_1(t) = a_1(T^t f) - t$ である: なぜなら $T^t E = S^t E T^t$, よって $(T^t E f)(n + \alpha_1(t)) = (S^t E T^t f)(n + \alpha_1(t)) = (E T^t f)(n + \alpha_1(t) + t)$. これと上式とから $\alpha_1(t) + t = a_1(T^t f)$.

さらに $t \gg 1$ のとき $\alpha_1(t) = a_1(T^t E f)$ である: なぜなら $t \gg 1$ のとき $E T^t f, T^t E f$ のどちらも一番大きいブロックが一番右にある. 仮定 $E f \neq 0$ によりそれらの大きさは ≥ 1 . よって $\alpha_1(t)$ の定義から主張の式を得る.

したがって, $t \gg 1$ のとき

$$a_1(T^t E f) = a_1(T^t f) - t. \quad (23)$$

$t \gg 1$ のときブロックは大きいものほど右にあるから (Fact 3.1), 各 $i = 1, \dots, p_2(f)$ に対して $a_i(E T^t f) - a_{i+1}(E T^t f) = a_i(T^t f) - a_{i+1}(T^t f) - 2$ である. $T E = S E T$ だから左辺は $a_i(T^t E f) - a_{i+1}(T^t E f)$ に等しい. よって, $t \gg 1$ のとき 各 $i = 1, \dots, p_2(f)$ に対して

$$a_i(T^t E f) - a_{i+1}(T^t E f) = a_i(T^t f) - a_{i+1}(T^t f) - 2 \quad (24)$$

である.

(IV) これで準備ができた. $t \gg 1$ のとき, 各 $i = 1, \dots, p_2(f)$ に対して

$$\begin{aligned} a_i(T^t E f) - a_{i+1}(T^t E f) &= a_i(T^t f) - a_{i+1}(T^t f) - 2 \\ &= A_i^t \left((P_i, \theta_i)_{i=1}^{p_1(f)} \right) - A_{i+1}^t \left((P_i, \theta_i)_{i=1}^{p_1(f)} \right) - 2 \\ &= A_i^t \left((P_i - 1, \theta_i)_{i=1}^{p_1(f)} \right) - A_{i+1}^t \left((P_i - 1, \theta_i)_{i=1}^{p_1(f)} \right) \\ &= A_i^t \left((P_i - 1, \theta_i)_{i=1}^{p_2(f)} \right) - A_{i+1}^t \left((P_i - 1, \theta_i)_{i=1}^{p_2(f)} \right) \end{aligned}$$

(順に, (24), Theorem 3.2, (21), (22) をつかった.) であるし, また

$$a_1(T^t E f) = a_1(T^t f) - t = A_1^t \left((P_i, \theta_i)_{i=1}^{p_1(f)} \right) - t = A_1^t \left((P_i - 1, \theta_i)_{i=1}^{p_1(f)} \right) = A_1^t \left((P_i - 1, \theta_i)_{i=1}^{p_2(f)} \right)$$

(今度は (23) をつかった.) である. したがって, $t \gg 1$ のとき, 各 $i = 1, \dots, p_2(f)$ に対して

$$a_i(T^t E f) = A_i^t \left((P_i - 1, \theta_i)_{i=1}^{p_2(f)} \right)$$

が成り立つ. これが示したいことであつた. □

5 箱玉系の初期値問題の解

ひきつづき $f \in \Omega$, $N = p_1(f)$ とする. (11) の \mathbb{G}_N^0 の或る元を完全に決定する手続きを与える. その結果, 箱玉系の任意時刻の状態を初期データだけで表す式が得られる.

以下 $p_i = p_i(f)$, $L_i = L_i(f)$ と書く. 次のようであつた:

$$\begin{aligned} p_1 &\geq \dots \geq p_s > 0, \quad s = L_1; & p_i &= 0 \text{ for } i > s. \\ L_1 &\geq \dots \geq L_N > 0, \quad N = p_1; & L_j &= 0 \text{ for } j > N. \end{aligned}$$

ソリトン解 (2) のパラメータ P_i, θ_i を (18) のように選んでおく. さらに次を仮定する (一般性は失われない):

$$P_i = P_j, i < j \implies \theta_i \geq \theta_j. \quad (25)$$

置換の集合 $\mathbb{G}_N^0 = \mathbb{G}_N^{t=0}((P_i, \theta_i)_{i=1}^N)$ の中に, 次のような全順序を定義する: 2 元 $\sigma, \tau \in \mathbb{G}_N^0$ に対し, 次をみたす i ($1 \leq i \leq N$) が存在するとき (そのときのみ) $\sigma < \tau$ であると定義する:

$$\sigma(j) = \tau(j) \text{ for } \forall j < i, \quad \text{and} \quad \sigma(i) < \tau(i).$$

この順序に関する最小元を σ と記すことにする. この置換 σ を決定する方法について述べよう.

折れ線の折れ点の座標からなる重複を許した集合というものを考えると便利である.

正整数 N にたいして, 左半無限区間では傾き $-N$, 右半無限区間では傾き 0 の (下に) 凸な (実数変数, 実数値) '折れ線' 関数で, 折れ点以外の部分の傾きは負の整数または 0 であるようなもの全体を \mathcal{P}_N とする. N ソリトン解を表す関数, すなわち, 正整数 N と非負の実数 P_i に対して (2) で定義される実数変数 n の関数 $\eta_n^0((P_i, \theta_i)_{i=1}^N)$ は \mathcal{P}_N に属する.

重複を許した N 個の実数からなる集合というものを次のように定義する: 写像 $\nu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で $\text{supp } \nu$ が有限 (ここで $\text{supp } \nu = \nu^{-1}(\mathbb{Z}_{>0})$) かつ $\sum_{n \in \text{supp } \nu} \nu(n) = N$ をみたすもののことを, \mathbb{R} 上の N 元多重集合という. それら全部からなる集合を $((\mathbb{R}_N))$ と表す. $\text{supp } \nu = \{x_1, \dots, x_m\}$, $\nu(x_i) = \lambda_i$ のとき, この多重集合を $\underbrace{\{x_1, \dots, x_1\}}_{\lambda_1}, \dots, \underbrace{\{x_m, \dots, x_m\}}_{\lambda_m}$ とか $\{x_1^{\lambda_1}, \dots, x_m^{\lambda_m}\}$ (或いは $\sum \lambda_i \cdot x_i$) と表記するのが便利である.

$\eta \in \mathcal{P}_N$ の折れ点の座標を x_i , そこでの傾きの増分を λ_i とするとき ($i = 1, \dots, m$), η に $((\mathbb{R}_N))$ の元 $\{x_1^{\lambda_1}, \dots, x_m^{\lambda_m}\}$ を対応させることにより写像 $\mathfrak{d}_N: \mathcal{P}_N \rightarrow ((\mathbb{R}_N))$ が定義される. これは 1 対 1 対応である. この写像による $\eta_n^0((P_i, \theta_i)_{i=1}^N)$ の像は (6) の A_k^0 , $k = 1, \dots, N$, からなる多重集合である; これは Proposition 2.1 や 2.2 による (図 1 も見よ).

$\mathcal{P} = \bigcup_{N \geq 0} \mathcal{P}_N$, $\mathcal{D} = \bigcup_{N \geq 0} ((\mathbb{R}_N))$ とおく. どちらの集合にも 2 元の和が (関数 (写像) の和として) 自然に定義される. \mathcal{P} の和は $\eta \in \mathcal{P}_N$, $\eta' \in \mathcal{P}_{N'}$ ならば $\eta + \eta' \in \mathcal{P}_{N+N'}$ というようになっている. \mathcal{D} の和についても同様. 写像 $\mathfrak{d}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{D}$ を $\eta \in \mathcal{P}_N$ に対して $\mathfrak{d}(\eta) = \mathfrak{d}_N(\eta)$ と定義する. 写像 \mathfrak{d} は和を和にうつす.

Proposition 2.1 (c), (d) より,

$$\eta_n^0((P_i - 1, \theta_i)_{i=1}^{p_1}) = \eta_n^0((P_i - 1, \theta_i)_{i=1}^{p_2}) + \eta_n^0((0, \theta_i)_{i=p_2+1}^{p_1}).$$

($p_2 = p_1$ のときは右辺第 2 項はない; $p_2 = 0$ のときは第 1 項はない. 以下このようなことをいちいち断らない.) 左辺の折れ点の座標は, Lemma 2.5 (b), Corollary 3.3 を用いて, $A_i^0((P_i - 1, \theta_i)_{i=1}^{p_1}) = A_i^0((P_i, \theta_i)_{i=1}^{p_1}) + 2(i-1) = a_i(f) + 2(i-1)$ である. 右辺第 1 項の折れ点の座標は, Theorem 4.2 を用いて, $a_i(Ef)$. したがって上の式の \mathfrak{d} による像は,

$$\{a_i(f) + 2(i-1)\}_{i=1}^{p_1} = \{a_i(Ef)\}_{i=1}^{p_2} \cup \{\theta_i\}_{i=p_2+1}^{p_1}. \quad (26)$$

右辺の 'U' は多重集合の和である.

$$J_1 = \sigma^{-1}((p_2, p_1)) = \{j \in [p_1] \mid p_2 < \sigma(j) \leq p_1\}$$

とおく. $i \in J_1$ ならば $P_{\sigma(i)} = 1$, よって $A_i^0((P_i - 1, \theta_i)_{i=1}^{p_1}) = \theta_{\sigma(i)}$ である. したがって $i, j \in J_1, i < j$ ならば, $A_i^0((P_i - 1, \theta_i)_{i=1}^{p_1}) \geq A_j^0((P_i - 1, \theta_i)_{i=1}^{p_1})$ なので, $\theta_{\sigma(i)} \geq \theta_{\sigma(j)}$ が成り立つ. これより次が導かれる:

$$i, j \in J_1, i < j \implies \sigma(i) < \sigma(j). \quad (27)$$

(なぜなら, $\theta_{\sigma(i)} > \theta_{\sigma(j)}$ のときは仮定 (25) から, また $\theta_{\sigma(i)} = \theta_{\sigma(j)}$ のときは σ が最小元であることから.) したがって, J_1 の元を小さい順に $j_{p_2+1}, \dots, j_{p_1}$ と書くと, $\sigma(j_h) = h$, $p_2 < h \leq p_1$ である.

$i = 1, \dots, p_1$ が J_1 の元かどうかは次のように判定できる: 以下 $\bar{a}_i^{(1)} = a_i(f) + 2(i-1)$, $a_i^{(1)} = a_i(Ef)$ と書く. $i = 1, \dots, p_1$ とする. (26) を見ながら...

(a) $\bar{a}_i^{(1)}$ がどの $a_h^{(1)}$, $h = 1, \dots, p_2$, と等しくないならば $i \in J_1$ である (明らか).

(b) $\bar{a}_i^{(1)}$ が或る $a_h^{(1)}$, $h = 1, \dots, p_2$, と等しく, かつ $j \neq i$ である j に対して $\bar{a}_j^{(1)} \neq a_h^{(1)}$ であるならば, $i \notin J_1$ である (これも明らか).

(c) $\bar{a}_i^{(1)}$ が或る $a_h^{(1)}$, $h = 1, \dots, p_2$, と等しく, かつ i 以外の或る j に対しても $\bar{a}_j^{(1)} = a_h^{(1)}$ であるとき: $i = 1$ であるか, あるいは $i > 1$ かつ $\bar{a}_{i-1}^{(1)} > \bar{a}_i^{(1)}$ であるならば $i \notin J_1$; そうでなければ $i \in J_1$ である (これは σ が最小元であることから従う).

まとめると, $I_0 = \{1, \dots, p_1\}$ および

$$I_1 = \{i_1^{(1)}, \dots, i_{p_2}^{(1)}\}, \quad \text{ここで} \quad i_h^{(1)} = \min \{i \in I_0 \mid \bar{a}_i^{(1)} = a_h^{(1)}\}$$

とおくと, $J_1 = I_0 \setminus I_1$.

同様にして

$$J_2 = \sigma^{-1}((p_3, p_2]) = \{j \in [p_1] \mid p_3 < \sigma(j) \leq p_2\}$$

は

$$\{\bar{a}_i^{(2)}\}_{i \in I_1} = \{a_i^{(2)}\}_{i=1}^{p_3} \cup \{\theta_i\}_{i=p_3+1}^{p_2}, \quad \text{但し} \quad \bar{a}_{i_h^{(1)}}^{(2)} = a_h^{(1)} + 2(h-1), \quad a_i^{(2)} = a_i(E^2 f),$$

に注目すると,

$$I_2 = \{i_1^{(2)}, \dots, i_{p_3}^{(2)}\}, \quad \text{ここで} \quad i_h^{(2)} = \min \{i \in I_1 \mid \bar{a}_i^{(2)} = a_h^{(2)}\}$$

とおけば, $J_2 = I_1 \setminus I_2$ と求められる.

以下同様. こうして置換 σ を求める手続きが得られた. まとめておく.

Proposition 5.1. $I_0 = \{1, \dots, p_1\}$ とする.

$$J_k = \sigma^{-1}((p_{k+1}, p_k]) = \{j \in [p_1] \mid p_{k+1} < \sigma(j) \leq p_k\} \quad (k = 1, \dots, s)$$

と定義する ($s = L_1$ であった). $J_k = \{j \in [p_1] \mid P_{\sigma(j)} = k\}$ と書ける.

(a) 各 $k = 1, \dots, s$ に対して,

$$i, j \in J_k, i < j \implies \theta_{\sigma(i)} \geq \theta_{\sigma(j)}$$

が成り立つ. したがって

$$i, j \in J_k, i < j \implies \sigma(i) < \sigma(j)$$

が成り立つ.

(b) J_k は次のようにして求められる:

$$a_i^{(k)} = a_i(E^k f) \quad (i = 1, \dots, p_{k+1}; k = 0, 1, \dots, s-1)$$

と書く (前には $a_i^{(0)}$ のことを a_i と書いた). $k = 1, \dots, s-1$ に対して, 順次 $\bar{a}_i^{(k)}, i_h^{(k)}, I_k$ を次で定義する:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{i_j^{(k-1)}}^{(k)} &= a_j^{(k-1)} + 2(j-1) \quad (j = 1, \dots, p_k), \\ i_h^{(k)} &= \min \{i \in I_{k-1} \mid \bar{a}_i^{(k)} = a_h^{(k)}\} \quad (h = 1, \dots, p_{k+1}), \\ I_k &= \{i_h^{(k)} \mid h = 1, \dots, p_{k+1}\}. \end{aligned}$$

このとき

$$\{\bar{a}_i^{(k)}\}_{i \in I_{k-1}} = \{a_i^{(k)}\}_{i=1}^{p_{k+1}} \cup \{\theta_i\}_{i=p_{k+1}+1}^{p_k}$$

であり, したがって

$$J_k = I_{k-1} \setminus I_k \quad (k = 1, \dots, s)$$

である.

(c) 各 k に対して, J_k の元を小さい順に $j_{p_{k+1}+1}, \dots, j_{p_k}$ と書くと, $\sigma(j_h) = h$ ($h = 1, \dots, p_1$).

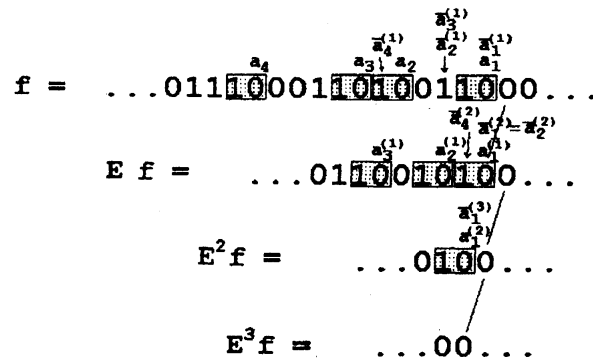


図 7: Proposition 5.1 にしたがって J_k 等を求めるために描いた図: 各状態を表す 1 と 0 の列の上に a_i 等の位置を記した (座標は上下で揃えて描いてある). 影つきの四角で囲まれている '10' が E を作用させると消去される. この図から I_k, J_k を決定していく過程は Example 5.2 に説明されている.

Proof. (a) $i, j \in J_k, i < j$ とする.

$$\begin{aligned} \theta_{\sigma(i)} - \theta_{\sigma(j)} &= A_i^0 + \sum_{h=1}^{i-1} 2 \min[P_{\sigma(h)}, P_{\sigma(i)}] - \theta_{\sigma(j)} \quad (\text{Lemma 2.5 (b) を使った}) \\ &\geq - \sum_{h=1}^{i-1} 2 \min[P_{\sigma(h)}, P_{\sigma(j)}] + \sum_{h=1}^{i-1} 2 \min[P_{\sigma(h)}, P_{\sigma(i)}]. \quad (\text{Lemma 2.5 (c) を使った}) \end{aligned}$$

$P_{\sigma(i)} = P_{\sigma(j)} = k$ だから右辺は 0. これで最初の主張が証明された.

第 2 の主張の証明は次のとおり:

$\theta_{\sigma(i)} > \theta_{\sigma(j)}$ ならば仮定 (25) により $\sigma(i) < \sigma(j)$ である.

$\theta_{\sigma(i)} = \theta_{\sigma(j)}$ ならば, σ が $\mathfrak{S}_{p_1}^0$ の最小元であることから, やはり $\sigma(i) < \sigma(j)$ である: なぜなら, もしそうでない, すなわち $\sigma(i) > \sigma(j)$ だとすると, $\bar{\sigma}$ を, $\bar{\sigma}(i) = \sigma(j), \bar{\sigma}(j) = \sigma(i)$, それ以外の h では $\bar{\sigma}(h) = \sigma(h)$, と定めると, $h < i$ である h に対しては $\bar{\sigma}(h) = \sigma(h)$, そして $\bar{\sigma}(i) = \sigma(j) < \sigma(i)$ であるから $\bar{\sigma} < \sigma$ となり, σ が最小元だったことと矛盾する.

(b) J_1, J_2 に関する本文中の説明と次の Example 5.2 によって了解されることを期待して, ここでは説明を省略する.

(c) J_k の定義と (a) の第 2 の主張から明らか. □

Example 5.2. 実際に I_k, J_k を求めていく過程 (Proposition 5.1 (b)) を例で説明しよう.

$$f = \dots 011100011010011000 \dots \in \Omega$$

とする. 以下の説明を読むときに図 7 を見ること.

[Step 0] f を見て $p_1 = 4$ であることと a_1, a_2, a_3, a_4 がすぐわかる. よって $I_0 = [p_1] = [4] = \{1, 2, 3, 4\}$.

[Step 1] 定義から $\bar{a}_h^{(1)} = a_h + 2(h-1)$ ($h \in [p_1] = [4]$) を計算して求める. Ef を見て $p_2 = 3$ であることと $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}$ がわかる. これで $i_h^{(1)}$ ($h \in [p_2] = [3]$) が求められる:

$$\begin{aligned} i_1^{(1)} &= \min \{i \in I_0 \mid \bar{a}_i^{(1)} = a_1^{(1)}\} = \min\{1\} = 1, \\ i_2^{(1)} &= \min \{i \in I_0 \mid \bar{a}_i^{(1)} = a_2^{(1)}\} = \min\{2, 3\} = 2, \\ i_3^{(1)} &= \min \{i \in I_0 \mid \bar{a}_i^{(1)} = a_3^{(1)}\} = \min\{4\} = 4. \end{aligned}$$

よって

$$I_1 = \{i_h^{(1)} \mid h \in [p_2] = [3]\} = \{1, 2, 4\}, \quad J_1 = I_0 \setminus I_1 = \{3\}.$$

[Step 2] $\bar{a}_{i_h^{(1)}}^{(2)} = a_h^{(1)} + 2(h-1)$ ($h \in [p_2] = [3]$) を計算して求める:

$$\bar{a}_1^{(2)} = a_1^{(1)}, \quad \bar{a}_2^{(2)} = a_2^{(1)} + 2, \quad \bar{a}_4^{(2)} = a_3^{(1)} + 4.$$

$E^2 f$ を見て $p_3 = 1$ であることと $a_1^{(2)}$ がわかる. これで $i_h^{(2)}$ ($h \in [p_3] = [1]$) が求められる:

$$i_1^{(2)} = \min \{i \in I_1 \mid \bar{a}_i^{(2)} = a_1^{(2)}\} = \min\{1\} = 4.$$

よって

$$I_2 = \{i_h^{(2)} \mid h \in [p_3] = [1]\} = \{4\}, \quad J_2 = I_1 \setminus I_2 = \{1, 2\}.$$

[Step 3] $E^3 f$ は 0 である. よって $s = 3$ ($s = L_1$ であった), $p_4 = 0$. そして

$$I_3 = \emptyset, \quad J_3 = I_2 \setminus I_3 = I_2 = \{4\}.$$

これですべての J_k が求められた.

次に Proposition 5.1 (c) にしたがって置換 σ を決定しよう. 各 J_k の元を小さい順に並べる; それを J_3 の元たち, J_2 の元たち, J_1 の元たちの順に左から 1 列に並べる:

$$\begin{array}{cccc} \overbrace{j_1}^{J_3} & \overbrace{j_2 \ j_3}^{J_2} & \overbrace{j_4}^{J_1} & \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

j_h の名前のつけ方は Proposition 5.1 (c) を再度見よ. このとき $\sigma(j_h) = h$ であるから,

$$\begin{array}{cccc} \sigma(4) & \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

を得る.

(Example おわり)

系として, 箱玉系の初期値問題の解の一つの表現を得る.

Theorem 5.3 (箱玉系の初期値問題の解). $f \in \Omega$ とする. これを初期状態とする箱玉系の時刻 t における状態は

$$u_n^t = (T^t f)(n) = \eta_{n+1}^{t-1} - \eta_{n+1}^t - \eta_n^{t-1} + \eta_n^t$$

である. ここで

$$\eta_n^t = \max \left\{ 0, \max_{\substack{J \subset [p_1] \\ J \neq \emptyset}} \left[\sum_{i \in J} \left(a_i + \sum_{j=1}^{i-1} 2 \min \{W_i, W_j\} + tW_i - n \right) - \sum_{\substack{i, j \in J \\ i \neq j}} \min \{W_i, W_j\} \right] \right\}; \quad (28)$$

$a_i = a_i(f)$, そして $W_i = P_{\sigma(i)}$ とおいた (W_i をここでは i 番目の「ソリトンの振幅」と呼ぼう³). W_i の値は, 置換 σ の決定法について述べた Proposition 5.1 から, 容易にわかる: 各 $i \in [p_1]$ にたいし $i \in J_k$ となる $k \in [s]$ を見つけよ ($s = L_1$ であった): このとき $W_i = k$ である.

³吉原大輔, “周期境界条件を持つソリトン・セルオートマトンの時間発展の周期について”, 東京大学数理学研究科 修士論文 (2001) の中で定義されている「振幅」の概念とは「左右が逆」である (詳しい説明は略す).

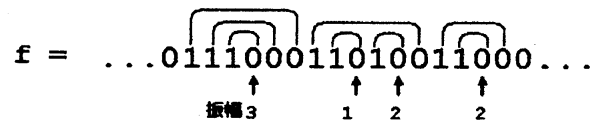


図 8: '10' のペアをつかった図から振幅 W_i を読み取る方法: 矢印のところが 1 のブロックの位置 (右から 1 番目, 2 番目, ...). 数字はその位置のソリトンの振幅.

Proof. 箱玉系の状態 f に対して Theorem 3.2 のように P_i, θ_i を選んだとする. η_n^t は (2) で与えられるが, これは次のようにも書ける:

$$\eta_n^t = \max \left\{ 0, \max_{\substack{J \subseteq [N] \\ J \neq \emptyset}} \left[\sum_{i \in J} (\theta_{\sigma(i)} + tP_{\sigma(i)} - n) - \sum_{\substack{i, j \in J \\ i \neq j}} \min \{P_{\sigma(i)}, P_{\sigma(j)}\} \right] \right\}.$$

Corollary 3.3 の (20) で $t = 0$ とおいた式から

$$\theta_{\sigma(i)} = a_i + \sum_{j=1}^{i-1} 2 \min \{P_{\sigma(i)}, P_{\sigma(j)}\}.$$

これを上の式に代入すれば式 (28) を得る. □

Example 5.4. さっきの Example 5.2 の状態

$$f = \dots 0111000111010011000 \dots$$

に対して W_i ($i \in [p_1] = [4]$) を求めてみよう.

J_k ($k \in [s] = [3]$) はそこで求めた:

$$J_1 = \{3\}, \quad J_2 = \{1, 2\}, \quad J_3 = \{4\}.$$

$i = 1, 2, 3, 4$ の順に調べると,

$$1 \in J_2 \text{ だから } W_1 = 2,$$

$$2 \in J_2 \text{ だから } W_2 = 2,$$

$$3 \in J_1 \text{ だから } W_3 = 1,$$

$$4 \in J_3 \text{ だから } W_4 = 3.$$

このような過程を経なくても, 慣れると図 8 から即座に振幅 W_i を読み取ることができる, ということに注意しておく (説明はしない; σ の定義等を考えれば了解できる). (Example おわり)

6 周期箱玉系の初期値問題の解

系の長さ $L (\geq 3)$ の周期箱玉系とは $\Omega_L = \{f \mid f: [L] \rightarrow \{0, 1\} \text{ ただし } \#f^{-1}(\{1\}) < L/2\}$ を状態の集合とする力学系である. 時間発展 $T_L: \Omega_L \rightarrow \Omega_L$ は図 3 のキャプションにあるものと全く同じように定義される ([6], [7]).

Theorem 6.1 (周期箱玉系の初期値問題の解). f を周期箱玉系の状態とする: $f \in \Omega_L$. 必要なら位置の座標の原点をずらすことにより, f において位置 $n=1$ は「マークされていない」と仮定することは可能(「マークされた」の定義は図 3 のキャプションを見よ); 以下このように仮定する. f の 1 のブロックの個数を N とする. 位置 $n=L$ を一番右, $n=1$ を一番左とみなすことにして, 箱玉系のときと同様に, f の i 番目の 1 のブロックの位置を a_i , そこの振幅を W_i (定義は Theorem 5.3 を見よ) とする ($i=1, \dots, N$). このとき, f を初期状態とする, 時刻 t における状態 $T_L^t f$ は次のように表される:

$$(T_L^t f)(n) = \eta_{n+1}^{t-1} - \eta_{n+1}^t - \eta_n^{t-1} + \eta_n^t;$$

$$\eta_n^t = \max_{\substack{m_i \in \mathbb{Z} \\ (i=1, \dots, N)}} \left[\sum_{i=1}^N m_i (b_i + tW_i - n) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_i \Xi_{ij} m_j \right]. \quad (29)$$

ここで

$$b_i = a_i(0) + \sum_{j=1}^{i-1} 2 \min[W_i, W_j] + W_i + \frac{Z_i}{2}, \quad (30)$$

$$\Xi_{ij} = \frac{Z_i}{2} \delta_{ij} + \min[W_i, W_j], \quad (31)$$

$$Z_i = L - \sum_{j=1}^N 2 \min[W_i, W_j]. \quad (32)$$

δ_{ij} はクロネッカーのデルタである. (29) の右辺は超離散 *theta* 関数にほかならない.

Proof. $\tilde{\Omega}_L = \{\tilde{f} \mid \tilde{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}, \text{ただし, すべての } n \in \mathbb{Z} \text{ にたいして } \tilde{f}(n+L) = \tilde{f}(n) \text{ であり, かつ } \#(\tilde{f}^{-1}(\{1\}) \cap [L]) < L/2\}$ とおく. $f \in \Omega_L$ に対して $\tilde{f} \in \tilde{\Omega}_L$ を $\tilde{f}|_{[L]} = f$ であるものとして定義する (一意に決まる). これを f の $\tilde{\Omega}_L$ への持ち上げと呼ぼう. $\tilde{T}_L: \tilde{\Omega}_L \rightarrow \tilde{\Omega}_L$ を $\tilde{T}_L(\tilde{f}) = \widetilde{T_L(\tilde{f}|_{[L]})}$ と定める. 力学系 $(\tilde{\Omega}_L, \tilde{T}_L)$ と周期箱玉系 (Ω_L, T_L) とは, 状態と時間発展が 1 対 1 に対応する.

周期箱玉系の状態 $f \in \Omega_L$ と非負整数 S に対して, 箱玉系の状態 $f_S \in \Omega$ を

$$f_S(j) = \begin{cases} f(n) & \text{if } -SL+1 \leq j \leq (S+1)L \text{ and } j \equiv n \pmod{L} \\ 0 & \text{if } j \leq -SL \text{ or } (S+1)L+1 \leq j \end{cases}$$

と定める. 極限 $\lim_{S \rightarrow \infty} T^t f_S$ は $\tilde{\Omega}_L$ の元となり, それを $[L]$ に制限したものが時刻 t における周期箱玉系の状態 $T_L^t f$ である. これを求めよう.

Theorem 5.3 により

$$(T^t f_S)(n) = \tilde{\eta}_{S,n+1}^{t-1} - \tilde{\eta}_{S,n+1}^t - \tilde{\eta}_{S,n}^{t-1} + \tilde{\eta}_{S,n}^t; \quad (33)$$

$$\tilde{\eta}_{S,n}^t = \max \left\{ 0, \max_{\substack{J \subset [(2S+1)N] \\ J \neq \emptyset}} \left[\sum_{i \in J} \left(\tilde{a}_i + \sum_{j=1}^{i-1} 2 \min[\tilde{W}_i, \tilde{W}_j] + t\tilde{W}_i - n \right) - \sum_{\substack{i, j \in J \\ i \neq j}} \min[\tilde{W}_i, \tilde{W}_j] \right] \right\}.$$

ここで \tilde{a}_i, \tilde{W}_i は状態 f_S における i 番目のブロックの位置と深さである. ($\tilde{\eta}$ は ' η の持ち上げ' という意味で命名したのではない. 記号を増やしたくないからこうした. 他も同様.) 次が成り立つことは明らか: $i \in [2SN]$ に対して

$$\tilde{a}_{i+N} = \tilde{a}_i - L, \quad \tilde{W}_{i+N} = \tilde{W}_i;$$

$i \in [N]$ に対して

$$a_i = \tilde{a}_{i+SN} = \tilde{a}_i - SL,$$

$$k \equiv i \pmod{N} \text{ であるようなすべての } k \in [(2S+1)N] \text{ にたいして } W_i = \tilde{W}_k.$$

$i \in [(2S+1)N]$ に対して $\tilde{\theta}_i = \bar{a}_i + \sum_{j=1}^{i-1} 2 \min[\tilde{W}_i, \tilde{W}_j]$ と定義すると

$$\tilde{\theta}_{i+N} - \tilde{\theta}_i = -L + \sum_{j=1}^N 2 \min[\tilde{W}_i, W_j] < -2\#f^{-1}(\{1\}) + \sum_{j=1}^N 2 \min[\tilde{W}_i, W_j] \leq 0.$$

(等号は直前に述べたことを使った; " $<$ " は 1 の個数に関する仮定から; " \leq " は $\#f^{-1}(\{1\}) = \sum_{j=1}^N W_j \geq \sum_{j=1}^N \min[\tilde{W}_i, W_j]$ だから.) すなわち $\tilde{\theta}_i > \tilde{\theta}_{i+N}$ が成り立つ.

$T_k = \{k, N+k, 2N+k, \dots, 2SN+k\}$ とおく ($k=1, \dots, N$). $\bigcup T_k = [(2S+1)N]$ である. $[(2S+1)N]$ の部分集合全部からなる集合を \mathfrak{T} とし, 整数の組 (n_1, \dots, n_N) に対し $\mathfrak{T}_{n_1, \dots, n_N} = \{J \in \mathfrak{T} \mid \#(J \cap T_k) = n_k (k=1, \dots, N)\}$ とおく. 異なる組 (n_1, \dots, n_N) に対する $\mathfrak{T}_{n_1, \dots, n_N}$ は互いに素で, かつこれらの和は \mathfrak{T} になる. したがって

$$\tilde{\eta}_{S,n}^t = \max_{J \in \mathfrak{T}} [\dots] = \max_{\substack{0 \leq n_j \leq 2S+1 \\ (j=1, \dots, N)}} \left[\max_{J \in \mathfrak{T}_{n_1, \dots, n_N}} [\dots] \right]$$

と書けるが, $\tilde{\theta}_i > \tilde{\theta}_{i+N}$ であるから, 内側の括弧の中を最大にする $\mathfrak{T}_{n_1, \dots, n_N}$ の元は

$$J_{n_1, \dots, n_N} = \{1, N+1, 2N+1, \dots, (n_1-1)N+1\} \\ \bigcup \{2, N+2, 2N+2, \dots, (n_2-1)N+1\} \bigcup \dots \bigcup \{N, 2N, 3N, \dots, n_N N\}$$

である. Z_i を (32) で定義すると ($i=1, \dots, N$), $\tilde{\theta}_{i+mN} = \tilde{\theta}_i - mZ_i$ だから

$$\sum_{i \in J_{n_1, \dots, n_N}} \tilde{\theta}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{m=0}^{n_i-1} \tilde{\theta}_{i+mN} = \sum_{i=1}^N \sum_{m=0}^{n_i-1} (\tilde{\theta}_i - mZ_i) = \sum_{i=1}^N \left(n_i \tilde{\theta}_i - \frac{n_i(n_i-1)}{2} Z_i \right), \\ \sum_{\substack{i, j \in J_{n_1, \dots, n_N} \\ i \neq j}} \min[\tilde{W}_i, \tilde{W}_j] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N n_i n_j \min[W_i, W_j] - \sum_{i=1}^N n_i W_i$$

となる. したがって次式を得る:

$$\tilde{\eta}_{S,n}^t = \max_{\substack{0 \leq n_j \leq 2S+1 \\ (j=1, \dots, N)}} \left[\sum_{i=1}^N \left(n_i \left(\tilde{\theta}_i + W_i + \frac{Z_i}{2} + tW_i - n \right) - \frac{n_i^2}{2} Z_i \right) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N n_i n_j \min[W_i, W_j] \right].$$

b_i, Ξ_{ij} を (30), (31) で定める. $\tilde{\eta}$ の式で $n_i = m_i + S$ と変数変換する. $\sum_{j=1}^N \Xi_{ij} = L/2$ や $\sum_{i=1}^N W_i = \#f^{-1}(\{1\})$ などを用いると次式を得る:

$$\tilde{\eta}_{S,n}^t = \eta_{S,n}^t + C_S + (\#f^{-1}(\{1\})) \cdot St - NSn;$$

ここで

$$\eta_{S,n}^t = \max_{\substack{-S \leq m_j \leq S+1 \\ (j=1, \dots, N)}} \left[\sum_{i=1}^N m_i \left(b_i + tW_i - n \right) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_i \Xi_{ij} m_j \right], \quad (34) \\ C_S = -\frac{S^2 NL}{2} + S \sum_{i=1}^N \left(\tilde{\theta}_i + W_i + \frac{Z_i}{2} \right)$$

とおいた. したがって (33) から (C_S 以降の項はキャンセルしてしまい)

$$(T^t f_S)(n) = \eta_{S,n+1}^{t-1} - \eta_{S,n+1}^t - \eta_{S,n}^{t-1} + \eta_{S,n}^t.$$

左辺の $S \rightarrow \infty$ の極限が周期箱玉系の時刻 t における状態の $\tilde{\Omega}_L$ への持ち上げになるのだった。右辺の $\eta_{S,n}^t$ の中で、パラメータ S は変数 m_j の動く範囲のみに入っている。(34) でこの極限をとると

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \eta_{S,n}^t = \max_{\substack{m_j \in \mathbb{Z} \\ (j=1, \dots, N)}} \left[\sum_{i=1}^N m_i (b_i + tW_i - n) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_i \Xi_{ij} m_j \right].$$

行列 $(\Xi_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ が正定値であれば、上式の \max は存在するから、この極限 $\lim \eta_{S,n}^t$ は存在する。

あとは行列 $(\Xi_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ が正定値であること、すなわち、任意の零でない $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ に対して $I(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i \Xi_{ij} x_j > 0$ であることを示せばよい。まず $Z_i, W_i > 0$ であることに注意しておく。 W_i を小さい順に並べて $W_{i_1} \leq \dots \leq W_{i_N}$ とし、これに応じて $U_k = W_{i_k}$, $y_k = x_{i_k}$ ($k = 1, \dots, N$) とおくと、任意の $x \neq 0$ に対して

$$\begin{aligned} I(x) &= \sum_{i=1}^N \frac{Z_i}{2} x_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \min[U_i, U_j] y_i y_j \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{Z_i}{2} x_i^2 + \sum_{i=1}^N U_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N 2U_i y_i y_j \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{Z_i}{2} x_i^2 + \sum_{i=1}^N U_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{N-1} 2U_i y_i (y_{i+1} + \dots + y_N) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{Z_i}{2} x_i^2 + \sum_{i=1}^{N-1} U_i [(y_i + \dots + y_N)^2 - (y_{i+1} + \dots + y_N)^2] + U_N y_N^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{Z_i}{2} x_i^2 + U_1 (y_1 + \dots + y_N)^2 + (U_2 - U_1) (y_2 + \dots + y_N)^2 + \dots + (U_N - U_{N-1}) y_N^2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

これで定理は証明された。 □

著者らは以前に周期箱玉系の初期値問題の解を得る手続き (アルゴリズム) を [8] で示したが、上で得た公式はそれとはまた異なる解の表現になっている。

参考文献

- [1] D. Takahashi and J. Satsuma, “A soliton cellular automaton”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **59**, 3514–3519 (1990).
- [2] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, “From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure”, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3247–3250 (1996).
- [3] E. Date, M. Jimbo and T. Miwa, “Method for generating discrete soliton equations. II”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **51**, 4125–4131 (1982).
- [4] D. Yoshihara, F. Yura and T. Tokihiro, “Fundamental cycle of a periodic box-ball system”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 99–121 (2003).
- [5] T. Tokihiro and J. Satsuma, “On a nature of a soliton cellular automaton”, *RIMS Kokyuroku* **1170**, 48–55 (2000).

- [6] F. Yura and T. Tokihiro, "On a periodic soliton cellular automaton", *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 3787–3801 (2002).
- [7] J. Mada, M. Idzumi and T. Tokihiro, "The exact correspondence between conserved quantities of a periodic box-ball system and string solutions of the Bethe ansatz equations", *J. Math. Phys.* **47**, 053507 (2006).
- [8] J. Mada, M. Idzumi and T. Tokihiro, "On the initial value problem of a periodic box-ball system", *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, L617–L623 (2006).